Über die Schwingungen der mechanischen Systeme

Dizioglu, Bekir

Veröffentlicht in:
Abhandlungen der Braunschweigischen Wissenschaftlichen Gesellschaft Band 39, 1987, S.43-60

Verlag Erich Goltze KG, Göttingen

Über die Schwingungen der mechanischen Systeme

Von **Bekir Dizioğlu**, Braunschweig

(Eingegangen am 9.10.1987)

Zusammenfassung

Die Schwingungserscheinungen in Maschinen mit periodisch-veränderlichen Massen und heteronomen Kraftfeldern sind in dem Buch [1] zusammengestellt. Daran anschließend wird in dieser Arbeit die Stabilität der Bewegung mit Einfluß der oben erwähnten Kräfte untersucht. Hierzu werden zuerst Schwingungen mechanischer Systeme von einem Freiheitsgrad und Systeme von zwei und mehr Freiheitsgraden erörtert. Diese Systeme bilden die entsprechenden Schwingungsmodelle der meisten Verarbeitungsmaschinen. Auch die Fälle mit den veränderlichen reduzierten Trägheitsmomenten werden untersucht. – Diese genauen Gleichungen des Ersatzsystems unterscheiden sich in zweifacher Weise von den Gleichungen mit den konstanten Trägheitsmomenten; nämlich zuerst in den Drehmassen, die als Koeffizienten des ersten Gliedes der entsprechenden Gleichungen, einmal variabel, das andere Mal konstant, erscheinen. Außerdem in einem Term der Gleichung tritt die Geschwindigkeit quadratisch auf, welches besonders störend wirkt.

Schließlich werden die erzwungenen Schwingungen eines linearen harmonischen Schwingers unter der Annahme, daß die Störfunktion in einer Fourierreihe entwickelbar ist, gelöst und gezeigt, daß diese Lösung auch gültig ist, wenn die Störfunktion diese Eigenschaft nicht besitzt. Es ist nur notwendig, daß diese Funktion absolut integrabel vorausgesetzt wird. Die erhaltenen Ergebnisse werden auf den speziellen Fall der Stoßerregung angewendet.

Summary
The vibration of the mechanical systems

The vibration of the mechanical systems and the heteronomfield of the forces are in the Book [1] summarize.

In this paper is investigate the stability of movement under influence of the such forces. This systems are one or more Freedom of the movement. The models of vibrations are the fundamental character for the most working machines. Also the cases, that the moment of inertia are variable in one case, constant in the other; second, in each of the exact equations there appears the terms which is especially trouble – some since it contains the square of the angular velocity.

The force vibration of single freedom is consider with a exitation function K(t), where K(t) is expressible in the Fourier series. It is shown, that this solution is also valid, if the function K(t) assumed only absolute integrable. The proof is give in the base on the integration of Cauchy. The result is apply on the exitation of mechanical shocks.

1. Einleitung

Die mannigfaltigen Schwingungserscheinungen in Maschinen mit periodisch-veränderlichen Massen und heteronomen Kraftfeldern sind in dem Buch [1] zusammengestellt worden.

Daran anschließend wird nun in dieser Arbeit die Stabilität der Bewegung mit Einfluß der oben erwähnten Kräfte eingehend untersucht. Dazu werden zuerst Schwingungen mechanischer Systeme von einem Freiheitsgrad und Systeme von zwei Freiheitsgraden erörtert.

Diese Systeme bilden die entsprechenden Schwingungsmodelle der meisten Verarbeitungsmaschinen.

Abschließend wurde im Rahmen der erzwungenen Schwingungen eines linearen Modells, der Einfluß des Impulsstoßes untersucht.

2. Die stabile Bewegung des Systems

Wir betrachten ein schwingendes System von einem Freiheitsgrade, und zwar ausdrücklich nicht ein reibungsfreies System, sondern ein solches, bei dem eine Reibungswirkung auftritt, die irgendwie von der Lage und der Geschwindigkeit des Systems abhängt, also ein wirkliches, physikalisch realisierbares System. Dieses System soll einer periodisch wirkenden Erregung ausgesetzt sein, deren Wirkung sich mit der Periode ω rythmisch wiederholt. Wenn das System selbst irgendwelchen zeitlich veränderlichen kinematischen Bedingungen unterworfen ist, so sollen diese die gleiche Periode haben. – Diese Voraussetzungen sind am einfachsten mathematisch formuliert:

Die Differentialgleichung der Bewegung soll von der Form

$$\frac{d^2x}{dt^2} = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \tag{1}$$

sein, wobei

$$F\left(x, \frac{dx}{dt}, t+\omega\right) = F\left(x, \frac{dx}{dt}, t\right) \tag{2}$$

sein soll.

Von der Differentialgleichung bzw. ihren Lösungen setzen wir nur voraus, daß die Werte der Lösungen und ihrer Ableitungen zur Zeit t eindeutige, stetige Funktionen der Anfangswerte ($t=0$) sein sollen. (NB. Es werden nur reelle Werte $t \geq 0$ betrachtet.)

Wir betrachten nun die „stabilen" Bewegungen des Systems. Dabei bezeichnen wir eine Lösung $x(t)$ als stabil, wenn sie den folgenden Bedingungen genügt:

1. Die Lösung ist beschränkt.

2. Jede hinreichend kleine, aber endliche „Störung" der Bewegung soll abklingen, d.h. jede Nachbarlösung, welche sich zu irgendeiner Zeit $\tau > 0$ mit ihrer Ableitung von der stabilen Lösung und ihrer Ableitung um weniger als $\varepsilon > 0$ unterscheidet, soll sich

nach hinreichend langer Zeit beliebig wenig von der stabilen Lösung unterscheiden. Mathematisch gesprochen: Es soll

$$\lim_{t=\infty} X(t) - x(t) = 0 \tag{3}$$

und

$$\lim_{t=\infty} X'(t) - x'(t) = 0 \tag{4}$$

sein, wenn nur zu irgendeiner Zeit $\tau > 0$

$$|\delta x(\tau)| = |X(\tau) - x(\tau)| < \varepsilon \tag{5}$$

und

$$|\delta x'(\tau)| = |X'(\tau) - x'(\tau)| < \varepsilon \tag{6}$$

ist. Die Größe ε bezeichnen wir als das „Stabilitätsmaß" der Bewegung*).

Wir denken uns nun die Gesamtheit der Lösungen unserer Differentialgleichung in der Weise dargestellt, daß wir zu jeder Zeit die Werte der Funktion und ihrer Ableitung in einer Ebene als rechtwinklige Koordinaten

$$\xi = x(t), \quad \eta = x'(t) \tag{7}$$

auftragen. Dann erfährt diese Ebene mit Ablauf der Bewegung eine stetige Deformation (Abbildung auf sich selbst). Betrachten wir nun eine stabile Lösung, und umgeben die ihr entsprechenden Punkte ξ, η für jeden Wert von t mit einem Quadrat, dessen Seiten die Vertikalen $\xi \pm \varepsilon$ und die Horizontalen $\eta \pm \varepsilon$ sind, so sagt unsere Stabilitätsdefinition aus, daß alle Lösungen, die irgendwann einmal in einem dieser Quadrate liegen, gegen die stabile Lösung konvergieren. Es folgt ferner, daß eine stabile Lösung niemals isoliert auftreten kann, sondern alle Lösungen, die in dem besagten Quadrat liegen, sind gleichfalls stabile Lösungen, wenn auch möglicherweise mit kleinerem Stabilitätsmaß.

In den Ebenen wird es nun solche Gebiete geben, deren Punkte stabilen Lösungen zugehören, und solche, welche instabilen Lösungen entsprechen. Wir bezeichnen die ersteren als „Stabilitätsgebiete"; gibt es ihrer mehrere, so numerieren wir sie in einer zweckmäßigen Weise. Offenbar müssen alle Lösungen, deren Werte in dem gleichen Stabilitätsgebiete liegen, sich in der Grenze $t = \infty$ der gleichen Funktion nähern, da nach Gleichung (3) bis (6) jede Lösung mit ihrer benachbarten der gleichen Grenzfunktion zustrebt.

Nun bemerken wir, daß mit x(t) wegen der Periodizität der Differentialgleichung auch $x(t+\omega)$ eine Lösung ist, die jedenfalls auch stabil ist, wenn x(t) stabil ist, und mindestens das gleiche Stabilitätsmaß besitzt wie x(t). Bezeichnen wir nun für eine bestimmte stabile Lösung in der ξ, η-Ebene die Anfangswerte $\xi_0 = x(0)$, $\eta_0 = x'(0)$ durch den Punkt P_0, die Anfangswerte für $x(t+\omega)$ $\xi_1 = x(\omega)$, $\eta_1 = x'(\omega)$ durch den Punkt P_1,

*) Etwas anschaulicher: Ist $\varepsilon(t)$ die zulässige Störung von Lage und Geschwindigkeit zur Zeit t, so ist das Stabilitätsmaß ε das Minimum von $\varepsilon(t)$ für alle $t \geq 0$. Dasselbe muß für eine stabile Lösung positiv sein.

so kann es sein, daß diese beiden Punkte in dem gleichen Stabilitätsgebiete liegen. Dann ist nach dem eben Gesagten:

$$\lim_{t=\infty} x(t+\omega) - x(t) = 0 \tag{8}$$

und

$$\lim_{t=\infty} x'(t+\omega) - x'(t) = 0. \tag{9}$$

Aus diesen Limesgleichungen folgt zunächst noch nicht, daß die Funktion $x(t)$ sich einer periodischen Funktion nähern muß, wie das Beispiel der Funktion $\sin\sqrt{t}$ beweist, die (8) und (9) erfüllt, ohne periodisch zu werden. Man kann die Periodizität der Grenzfunktion aber in der folgenden Weise einsehen. Wir untersuchen zu diesem Zweck die Abbildung, welche in der ξ,η-Ebene dadurch hervorgerufen wird, daß wir von den Werten $x(0), x'(0)$ zu den Werten $x(\omega), x'(\omega)$ übergehen. Da eine stabile Bewegung stets eine stabile Bewegung bleibt, so kann ein Punkt aus einem Stabilitätsbereich durch die Abbildung nur wieder in einen solchen übergehen. Umgekehrt kann aber ein Punkt, der in ein Stabilitätsgebiet übergegangen ist, auch nur aus einem solchen kommen, denn wenn zur Zeit $t=\omega$ ein gewisses Feld in der Umgebung einer stabilen Lösung L stabile Lösungen enthält, so kann man zur Zeit $t=0$ wegen der stetigen Abhängigkeit der Werte $x(\omega), x'(\omega)$ von den Werten $x(0), x'(0)$ eine gewisse Umgebung von Lösungen um L abgrenzen, derart, daß sie bei $t=\omega$ in stabile Nachbarlösungen von L übergehen. Wir sehen also, daß durch den Übergang von 0 zu ω die verschiedenen Stabilitätsgebiete auf sich selbst oder aufeinander in eindeutiger Weise abgebildet werden. Wegen der Stetigkeit der Abbildung wird auch jedes Stabilitätsgebiet auf ein und nur ein solches abgebildet. Liegt nun der Punkt P_1 im gleichen Stabilitätsgebiet wie P_0, so wird dieses Stabilitätsgebiet auf sich abgebildet. Dann müssen auch die sämtlichen Punkte P_2, P_3, P_4, P_5 usw. in diesem Gebiet liegen, deren Koordinaten die Werte

$$x(2\omega), x'(2\omega);\ x(3\omega), x'(3\omega);\ x(4\omega), x'(4\omega) \text{ usw.}$$

darstellen. Alle diese Punkte gehen durch die Transformation, welche P_0 nach P_1 überführt, auseinander hervor. Da die zugrunde gelegte Lösung als stabile Lösung beschränkt ist, d.h. samt ihrer Ableitung kleiner als eine angebbare Größe M, so müssen alle diese Punkte im Innern des Quadrates liegen, dessen Mittelpunkt der Nullpunkt und dessen Seitenlänge 2M ist. In diesem endlichen Gebiet müssen die unendlich vielen Punkte P_ν also mindestens einen Häufungspunkt P haben. Diesem Häufungspunkte entspricht nun eine periodische Lösung. Denn der Abstand eines Punktes von seinem Bildpunkte bei der Transformation $0 \to \omega$ ist nach der über die Lösungen der Differentialgleichung gemachten Voraussetzung eine stetige Funktion von ξ und η; da er nach Gleichung (8) und (9) in der Nähe des Häufungspunktes P jede positive Schranke unterschreiten muß, so kann er in P nur Null sein. Also geht P in sich über und stellt die Anfangswerte einer periodischen Lösung dar, welcher alle Lösungen des Gebietes in der Grenze $t=\infty$ zustreben.

Wir hatten vorausgesetzt, daß der Punkt P_1 im gleichen Stabilitätsgebiet läge wie P_0. Von dieser Voraussetzung müssen wir uns noch befreien. Wir betrachten also eine stabile Lösung, bei welcher das nicht der Fall ist, und fassen wieder die Punkte P_0, P_1, P_2, P_3 usw.

ins Auge, deren Koordinaten $x(0), x'(0)$; $x(\omega), x'(\omega)$; $x(2\omega), x'(2\omega)$ usw. sind. Wegen der Beschränktheit von $x(t)$ und $x'(t)$ liegen sie wieder in einem Quadrat von der Seitenlänge $2M$ um den Nullpunkt. Die Stabilitätsgebiete, in denen sie liegen, bezeichnen wir durch die gleichen Ziffern wie die Punkte, und zeigen, daß nach einer gewissen Anzahl – sagen wir n – von Transformationen der Punkt P_n wieder in dem gleichen Stabilitätsgebiet liegen muß, wie P_0. Die betrachtete Lösung hat nämlich ein Stabilitätsmaß $\varepsilon > 0$. Dann wissen wir, daß mit dem Punkte P_v auch alle die Punkte zu seinem Stabilitätsgebiet gehören, welche das Quadrat von der Seitenlänge 2ε erfüllen, dessen Mittelpunkt P_v ist. Die Stabilitätsgebiete, in denen die Punkte P_v liegen können, haben also mindestens den Flächeninhalt $4\varepsilon^2$, es kann somit in dem Quadrat um den Nullpunkt mit der Seitenlänge $2M$ nur endlich viele geben. Also muß einer der Punkte wieder in das Stabilitätsgebiet P_0 zurückkehren. Ist dies der Punkt P_n, so folgt genau wie oben, daß

$$\lim_{t=\infty} x(t+n\omega) - x(t) = 0 \tag{10}$$

und

$$\lim_{t=\infty} x'(t+n\omega) - x'(t) = 0 \tag{11}$$

sein muß, und daß sich $x(t)$ auch wirklich einer periodischen Funktion mit der Periode $n\omega$ nähern muß.

Damit ist der gesuchte Beweis geliefert. Es ist gezeigt, daß jede stabile Lösung der Differentialgleichung (1) mit wachsendem t einer periodischen Bewegung zustrebt. Ich glaube auch, daß es das allgemeinste ist, was man ohne weitere Voraussetzungen über die Natur der Differentialgleichung erhalten kann. Besonderes Interesse darf natürlich die Frage beanspruchen, unter welchen Bedingungen jede beschränkte Lösung stabil ist.

Es sei bemerkt, daß unser Beweis nicht notwendig voraussetzt, daß wir es mit einem System von nur einem Freiheitsgrade zu tun haben. Er läßt sich ohne weiteres auf Systeme von beliebig vielen Freiheitsgraden anwenden. – Wesentlich ist dagegen, daß wir das Vorhandensein einer Reibung annehmen, denn bei reibungsfreien Systemen gibt es im allgemeinen keine Lösungen, die im Sinne unserer Definition stabil sind. An Stelle der stabilen Lösungen treten dort solche, die wir als „halbstabil" bezeichnen können, bei denen eine Störung zwar nicht abklingt, aber doch beschränkt bleibt. Die Aufsuchung dieser halbstabilen periodischen Lösungen der reibungsfreien Systeme ist aber deshalb von praktischer Bedeutung, weil die Reibung in den für die Anwendung wichtigen Fällen in der Regel nur klein ist. Da mit abnehmender Reibung die stabilen Lösungen sich solchen halbstabilen Lösungen nähern werden, so genügt meist die Kenntnis der letzteren, um auch über die Bewegung der Systeme mit Reibung ausreichenden Aufschluß zu gewinnen. Nur im Falle der Resonanz sind besondere Betrachtungen erforderlich.

Man kann gegen unsere Betrachtungen vielleicht einwenden, daß die Forderung der Existenz stabiler Lösungen im Sinne unserer Definition eine allzu scharfe wäre. Doch ist zu bedenken, daß eine derartige Forderung notwendig ist, wenn man über die tatsächliche Bewegung eines Systems, welches zufälligen Störungen unterworfen ist, überhaupt etwas Bestimmtes aussagen will. Gäbe es nämlich keine stabilen Lösungen, so würde das System durch eine noch so kleine zur geeigneten Zeit eintretende Störung dauernd beeinflußt, so daß man z.B. von zwei gleichen Systemen, die mit gleichen Anfangsbedingungen in Betrieb gesetzt würden, nicht behaupten könnte, daß ihre Bewegungen gleich verliefen. Die Beschreibung eines derartigen Bewegungsvorganges ist dann nur möglich, wenn man über die Wirkung der Störungen (bzw. über die die Stabilität in unserem Sinne ausschließenden Verzweigungen der Lösungen) besondere, im allgemeinen statistische Betrachtungen anstellt.

3. Zur Berechnung der Stabilität periodischer Bewegungsvorgänge

Die Berechnung der Stabilität eines periodischen Vorganges

$$x = x_0(t),$$

der einer periodischen Differentialgleichung

$$x'' + F(x, x', t) = 0 \tag{1}$$

genügt (für welche also $F(x, x', t+\omega) = F(x, x', t)$ ist), geschieht in der Weise, daß man eine von $x_0(t)$ wenig verschiedene Bewegung

$$x(t) = x_0(t) + \xi(t) \tag{2}$$

betrachtet. Für die als klein vorausgesetzte Störung $\xi(t)$ gewinnt man dann eine lineare Differentialgleichung

$$\xi'' + P(t)\xi' + Q(t)\xi = 0, \tag{3}$$

indem man unter Beschränkung auf die in ξ und ξ' linearen Glieder mit dem Ansatz (2) in die Differentialgleichung (1) eingeht. Wegen der Periodizität der Differentialgleichung (1) und ihrer Lösung $x_0(t)$ sind dann die Koeffizienten von (3)

$$P(t) = \frac{\partial F}{\partial x'_0}, \quad Q(t) = \frac{\partial F}{\partial x_0}, \tag{4}$$

ebenfalls periodische Funktionen der Zeit, und es kommt nun darauf an, zu entscheiden, ob die Lösungen von (3) mit wachsender Zeit zunehmen können (Fall der Instabilität), beschränkt bleiben (Fall der Halbstabilität), oder sämtlich abnehmen (Fall der Stabilität). Wir beschränken uns hier auf den Fall, daß $P(t) = 0$ ist, auf welchen wir den allgemeinen Fall durch die Substitution $\xi = e^{-1/2\int P dt}\eta$ stets zurückführen können.

Über die Lösungen der Differentialgleichung

$$\xi'' + Q(t)\,\xi = 0 \tag{5}$$

gewinnt man dann in der folgenden, bekannten Weise Aufschluß. Wir stellen uns zunächst zwei Partikularlösungen $u(t)$ und $v(t)$ her, indem wir (5) von $t = 0$ bis $t = \omega$, nötigenfalls näherungsweise, integrieren. Dabei normieren wir diese Funktionen so, daß die Determinante

$$u \cdot v' - v \cdot u' = 1 \tag{6}$$

wird, was stets möglich ist, da sie wegen $P=0$ konstant sein muß.

Dann beherrschen wir u und v für alle Werte von t, denn wegen der Periodizität der Differentialgleichung müssen auch $u\,(t+\omega)$ und $v\,(t+\omega)$ Lösungen von (5) sein, die sich demgemäß durch die Partikularlösungen u und v mit konstanten Beiwerten in der Form

$$\left.\begin{array}{ll} u\,(t+\omega)=\alpha_{11}\,u\,(t)+\alpha_{12}\,v\,(t) & v\,(t+\omega)=\alpha_{21}\,u\,(t)+\alpha_{22}\,v\,(t) \\ u'(t+\omega)=\alpha_{11}\,u'(t)+\alpha_{12}\,v'(t) & v'(t+\omega)=\alpha_{21}\,u'(t)+\alpha_{22}\,v'(t) \end{array}\right\} \tag{7}$$

darstellen lassen. Die Beiwerte α_{11} bis α_{12} erhalten wir, wenn wir $t=0$ setzen zu

$$\left.\begin{array}{ll} \alpha_{11}=v'(0)\,u\,(\omega)-v\,(0)\,u'(\omega) & \alpha_{21}=v'(0)\,v\,(\omega)-v\,(0)\,v'(\omega) \\ \alpha_{12}=u\,(0)\,u'(\omega)-u'(0)\,u\,(\omega) & \alpha_{22}=u\,(0)\,v'(\omega)-u'(0)\,v\,(\omega) \end{array}\right\} \tag{8}$$

(NB. $u(0)\,v'(0)-u'(0)\,v(0)=1$). Wir können also, wenn u und v von $t=0$ bis $t=\omega$ bekannt sind, durch wiederholte Anwendung der Substitution (7) auf $u\,(t+n\omega)$, $v\,(t+n\omega)$ schließen. Wir geben dieser Substitution die einfachste Form, wenn wir aus u und v eine Lösung

$$\eta = a\,u + b\,v \tag{9}$$

bilden, die sich bei einem Fortschreiten um ω nur mit einem konstanten Faktor λ multipliziert. Soll

$$\eta\,(t+\omega)=\lambda\,\eta\,(t) \tag{10}$$

sein, so muß

$$a\,\alpha_{11}\,u\,(t) + a\,\alpha_{12}\,v\,(t) + b\,\alpha_{21}\,u\,(t) + b\,\alpha_{22}\,v\,(t) = \lambda\,a\,u\,(t) + \lambda\,b\,u\,(t) \tag{11}$$

sein, und das ist erreicht, wenn a und b den linearen Gleichungen

$$(\alpha_{11}-\lambda)\,a + \alpha_{21}\,b = 0, \quad \alpha_{12}\,a + (\alpha_{22}-\lambda)\,b = 0 \tag{12}$$

genügen. Durch Nullsetzen der Determinante erhalten wir

$$\begin{array}{l} \lambda^2 - (\alpha_{11}+\alpha_{22})\,\lambda + (\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}) = 0 \\ \lambda = \tfrac{1}{2}\left\{\alpha_{11}+\alpha_{22} \pm \sqrt{(\alpha_{11}+\alpha_{22})^2 - 4\,(\alpha_{11}\,\alpha_{22}-\alpha_{12}\,\alpha_{21})}\right\}. \end{array} \tag{13}$$

Für jeden der beiden Wurzelwerte λ_1 und λ_2 erhalten wir dann bis auf einen konstanten Faktor aus (12) je ein Wertesystem a und b, d.h. wir erhalten zwei Lösungen unserer Differentialgleichung:

$$\eta_1 = a_1\,u + b_1\,v, \quad \eta_2 = a_2\,u + b_2\,v, \tag{14}$$

für welche

$$\eta_1\,(t+\omega) = \lambda_1\,\eta_1\,(t), \quad \eta_2\,(t+\omega) = \lambda_2\,\eta_2\,(t) \tag{15}$$

ist. Da wegen (6), wie man leicht nachrechnet,

$$\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21} = 1 \tag{16}$$

ist, ist das Produkt

$$\lambda_1 \lambda_2 = \alpha_{11} \alpha_{22} - \alpha_{12} \alpha_{21} = 1. \tag{17}$$

Sind also die Wurzeln reell, so muß eine Wurzel, sagen wir λ_1, größer als eins sein. Dann haben wir den Fall der Instabilität, denn es gibt eine Lösung η_1 der Differentialgleichung, welche sich bei jedem Fortschreiten vergrößert. Sind die Wurzeln komplex, so liegt „Halbstabilität" vor, denn dann ist

$$|\lambda_1| = |\lambda_2| = 1, \tag{18}$$

also

$$|\eta_1 (t + \omega)| = |\eta_1 (t)|, \quad |\eta_2 (t + \omega)| = |\eta_2 (t)|. \tag{19}$$

η_1 und η_2 bleiben somit beschränkt, und damit auch jede Lösung der Differentialgleichung, da sich jede aus η_1 und η_2 mit konstanten Beiwerten linear zusammensetzt. Der Fall gleicher Wurzeln gehört zum instabilen Typus, wenn nicht schon u und v beide periodisch waren.

Die Schwierigkeit der Stabilitätsberechnung beruht also lediglich darin, bei einer approximativen Integration die Größen α_{11} bis α_{22} mit genügender Genauigkeit zu erhalten, und die folgende Erleichterung der Rechnung besteht darin, daß für die in Frage kommenden Größen eine Integraldarstellung gegeben wird, welche auch dann noch gut konvergiert, wenn u und v selbst nur mit geringer Genauigkeit ermittelt sind. Diese Integraldarstellung erhalten wir folgendermaßen: wir formen die Integrale

$$\left.\begin{aligned}
J(u,u) &= \int_0^\omega \{u'(t)\, u'(\omega - t) + Q(t)\, u(t)\, u(\omega - t)\}\, dt \\
J(u,v) &= \int_0^\omega \{u'(t)\, v'(\omega - t) + Q(t)\, u(t)\, v(\omega - t)\}\, dt \\
J(v,u) &= \int_0^\omega \{v'(t)\, u'(\omega - t) + Q(t)\, v(t)\, u(\omega - t)\}\, dt \\
J(v,v) &= \int_0^\omega \{v'(t)\, v'(\omega - t) + Q(t)\, v(t)\, v(\omega - t)\}\, dt
\end{aligned}\right] \tag{20}$$

durch partielle Integration um, z. B.

$$J(u,u) = [-u'(t)\, u(\omega - t)]_0^\omega + \int_0^\omega u(\omega - t)\, \{u''(t) + Q(t)\, u(t)\}\, dt,$$

also

$$J(u,u) = -u'(\omega)\, u(0) + u'(0)\, u(\omega) \tag{21}$$

und erhalten, da das Integral wegen der Differentialgleichung fortfällt

$$J(u,u) = -\alpha_{12}, \quad J(u,v) + J(v,u) = \alpha_{11} - \alpha_{12}, \quad J(v,v) = \alpha_{21}. \tag{22}$$

Fügen wir zu diesen Größen noch $\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{21}\,\alpha_{12} = 1$, so können wir aus ihnen die λ-Werte berechnen, die wir in der Form:

$$\begin{aligned}\lambda = \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{11}-\alpha_{22})^2 + 4\,(\alpha_{11}\,\alpha_{22} - \alpha_{12}\,\alpha_{21}) + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}} \pm \\ \pm \tfrac{1}{2}\sqrt{(\alpha_{11}-\alpha_{22})^2 + 4\,\alpha_{12}\,\alpha_{21}}\end{aligned} \tag{23}$$

schreiben können. Insbesondere erhalten wir als Bedingung für die Realität von λ (Instabilität)

$$\{J\,(u,v) + J\,(v,u)\}^2 \geq 4\,J\,(u,u)\,J\,(v,v). \tag{24}$$

Über die Anwendung der dargelegten Methode und über eine Vereinfachung in speziellen Fällen wurde an anderer Stelle berichtet [1].

4. Ein System von zwei Freiheitsgraden mit veränderlichem reduzierten Massenträgheitsmoment sowie mit geschwindigkeitsabhängiger äußerer Kraft

Wenn in einem Schwingungssystem neben den angreifenden Kräften (Momenten) auch die Massen (Massenträgheitsmomente) von den Koordinaten oder ihren Ableitungen abhängen, führt das auf „Parametererregte Schwingungen". Das folgende Bild zeigt ein solches Modell von zwei Freiheitsgraden:

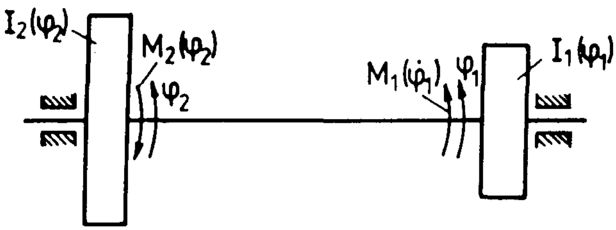

Bild 1:
Das Modell des Schwingungssystems von zwei Freiheitsgraden. $I_1(\varphi_1)$ und $I_2(\varphi_2)$ sind periodisch veränderliche Massenträgheitsmomente [1].

Das Moment M_1 ist als Antriebsmoment, z.B. von einem Elektromotor, geschwindigkeitsabhängig, während das Abtriebsmoment M_2 eine Funktion der Getriebestellung sei. Die Bewegungsgleichungen dieses Systems sind

$$\left.\begin{aligned} I_1(\varphi_1)\,\ddot{\varphi}_1 + \frac{dI_1}{d\varphi_1}\,\frac{\dot{\varphi}_1^2}{2} + c\,(\varphi_1 - \varphi_2) = M_1(\dot{\varphi}_1); \\ I_2(\varphi_2)\,\ddot{\varphi}_2 + \frac{dI_2}{d\varphi_2}\,\frac{\dot{\varphi}_2^2}{2} + c\,(\varphi_2 - \varphi_1) = -M_2(\varphi_2). \end{aligned}\right\} \tag{1}$$

Zunächst wird die Periodizität

$$\left.\begin{aligned}\dot{\varphi}_1(t) = \dot{\varphi}_1(t+T); \\ \dot{\varphi}_2(t) = \dot{\varphi}_2(t+T),\end{aligned}\right\}$$

und „kleine“ Schwingungen vorausgesetzt, wir schreiben

$$\varphi_1 = \varphi + \Delta\varphi_1;$$
$$\varphi_2 = \varphi + \Delta\varphi_2.$$

Für die Herleitung einer geschlossenen Lösung sind weitere Vereinfachungen nötig.

1) Wir setzen voraus konstante Massenträgheitsmomente: I_i = const. Infolge dieser Voraussetzung wird die Bewegungsgleichung

$$(I_1 + I_2)\,\ddot{\varphi} = M_1(\dot{\varphi}) - M_2(\varphi).$$

Diese Differentialgleichung wird umgestellt und somit ein „Dynamisches Moment“ eingeführt:

$$M_{dyn} = M_1(\dot{\varphi}) - I_1(\ddot{\varphi}) = -[M_2(\varphi) + I_2\,\ddot{\varphi}].$$

Man kann schreiben:

$$\left.\begin{aligned} I_1\Delta\ddot{\varphi}_1 + c\,(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) &= M_{dyn} \\ I_2\Delta\ddot{\varphi}_2 + c\,(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) &= -M_{dyn}. \end{aligned}\right\}$$

Daraus folgt

$$(\Delta\ddot{\varphi}_1 - \Delta\ddot{\varphi}_2) + \frac{c\,(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) = \frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2} M_{dyn},$$

in der für M_{dyn} die entsprechende Fourier-Reihe geschrieben wird:

$$M_{dyn} = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{s=1}^{\infty} H_s \sin(spt + \delta_s).$$

Schreibt man für $\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2 = \Delta\psi$, so wird

$$\Delta\ddot{\psi} + k^2\Delta\psi = h_0 + \sum_{s=1}^{\infty} h_s \sin(spt + \delta_s), \quad h_0 = \frac{a_0}{2}\,\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2},$$
$$h_s = \frac{H_s(I_1 + I_2)}{I_1 I_2}, \quad k^2 = c\,\frac{I_1 + I_2}{I_1 I_2}.$$

Bekanntlich ist die Lösung dieser inhomogenen Gleichung

$$\Delta\psi = \frac{h_0}{k^2} + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s}{k^2 - s^2p^2}\sin(spt + \delta_s).$$

Durch die Ableitung nach der Zeit erhalten wir

$$\Delta\dot{\psi} = \sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s sp}{k^2 - s^2p^2}\cos(spt + \delta_s),$$

$$\Delta\ddot{\psi} = -\sum_{s=1}^{\infty} \frac{h_s s^2 p^2}{k^2 - s^2 p^2} \sin(spt + \delta_s).$$

2) Das im Bild 1 dargestellte System sei $c \to \infty$, d.h. $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. In diesem Fall lautet die entsprechende Differentialgleichung

$$(I_1 + I_2)\ddot{\varphi} + \frac{d(I_1 + I_2)}{d\varphi} \frac{\dot{\varphi}^2}{2} = M_1(\dot{\varphi}) - M_2\varphi).$$

Die notwendige Linearisierung muß in den Amplituden $\Delta\varphi_1$ und $\Delta\varphi_2$ erfolgen, da die Geschwindigkeiten und Beschleunigungen nicht als klein vorausgesetzt werden dürfen.

3) Aus der Trefftz'schen Transformation in die neuen Koordinaten [1], [3],

$$q_i = \int_{\varphi}^{\varphi_i} \sqrt{I_i(\varphi_i)}\, d\varphi_i, \quad i = 1, 2 \tag{2}$$

ergibt sich die folgende übersichtliche Linearisierung. Man ermittelt zuerst $\dot{q}_i$ und $\ddot{q}_i$ $(i = 1, 2)$

$$\dot{q}_i = \sqrt{I_i(\varphi_i)}\,\dot{\varphi}_i - \sqrt{I_i(\varphi)}\,\dot{\varphi};$$

$$\ddot{q}_i = \sqrt{I_i(\varphi_i)}\,\ddot{\varphi}_i + \frac{\frac{dI_i}{d\varphi_i}}{2\sqrt{I_i(\varphi_i)}}\dot{\varphi}_i^2 - \frac{\frac{d}{d\varphi}[E_i(\varphi)]}{\sqrt{I_i(\varphi)}},$$

wobei $E_i(\varphi) = \frac{1}{2} I_i(\varphi)\dot{\varphi}^2$, $i = 1, 2$ bedeuten,

und beachtet außerdem die Kleinheit der Torsionswinkel und setzt $I_i(\varphi_i) = I_i(\varphi)$, so kann dann die Beziehung (2) in der Form [1],

$$\Delta\varphi_i = \frac{q_i}{\sqrt{I_i(\varphi)}}$$

geschrieben werden. Außerdem $\Delta\varphi_1^2, \Delta\varphi_2^2, \Delta\varphi_1 . \Delta\varphi_2$ sind als Größen zweiter Ordnung zu vernachlässigen. Dadurch können in der Gleichung (1) die vorkommenden Ausdrücke wie folgt linearisiert werden.

$$\frac{c}{\sqrt{I_1(\varphi_1)}}(\Delta\varphi_1 - \Delta\varphi_2) = \frac{c}{\sqrt{I_1(\varphi)}}\left[\frac{q_1}{\sqrt{I_1(\varphi)}} - \frac{q_2}{\sqrt{I_2(\varphi)}}\right];$$

$$\frac{c}{\sqrt{I_2(\varphi_2)}}(\Delta\varphi_2 - \Delta\varphi_1) = \frac{c}{\sqrt{I_2(\varphi)}}\left[\frac{q_2}{\sqrt{I_2(\varphi)}} - \frac{q_1}{\sqrt{I_1(\varphi)}}\right].$$

Außerdem

$$\frac{M_1(\dot{\varphi}_1)}{\sqrt{I_1(\varphi_1)}} = \frac{M_1(\dot{\varphi})}{\sqrt{I_1(\varphi)}} + \frac{d}{d\varphi}\left[\frac{M_1(\dot{\varphi})}{\sqrt{I_1(\varphi)}}\right]\Delta\varphi_1 = \frac{M_1(\dot{\varphi})}{\sqrt{I_1(\varphi)}} +$$

$$+\frac{\frac{d}{d\dot{\varphi}}[M_1(\dot{\varphi})]\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}q_1}{I_1(\varphi)}-\frac{M_1(\dot{\varphi})\frac{dI_1}{d\varphi}}{2\,[I_1(\varphi)]^2}q_1;$$

$$\frac{M_2(\varphi_2)}{\sqrt{I_2(\varphi_2)}}=\frac{M_2(\varphi)}{\sqrt{I_2(\varphi)}}+\frac{d}{d\varphi}\left[\frac{M_2(\varphi)}{I_2(\varphi)}\right]\Delta\varphi_2=$$

$$=\frac{M_2(\varphi)}{\sqrt{I_2(\varphi)}}+\frac{\frac{d}{d\varphi}[M_2(\varphi)]}{I_2(\varphi)}q_2-\frac{M_2(\varphi)\frac{dI_2}{d\varphi}}{2\,[I_2(\varphi)]^2}q_2.$$

Sonach erhält man für q_1 und q_2 die linearisierten Differentialgleichungen

$$\ddot{q}_1+\frac{c}{\sqrt{I_1(\varphi)}}\left[\frac{q_1}{\sqrt{I_1(\varphi)}}-\frac{q_2}{\sqrt{I_2(\varphi)}}\right]-\left\{\frac{\frac{d}{d\dot{\varphi}}[M_1(\dot{\varphi})]\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}}{I_1(\varphi)}-\frac{M_1(\dot{\varphi})\frac{dI_1}{d\varphi}}{2\,[I_1(\varphi)]^2}\right\}q_1=$$

$$=\frac{M_1(\dot{\varphi})-\frac{d}{d\varphi}[E_1(\varphi)]}{\sqrt{I_1(\varphi)}};$$

$$\ddot{q}_2+\frac{c}{\sqrt{I_2(\varphi)}}\left[\frac{q_2}{\sqrt{I_2(\varphi)}}-\frac{q_1}{\sqrt{I_1(\varphi)}}\right]+\left\{\frac{\frac{d}{d\varphi}[M_2(\varphi)]}{I_2(\varphi)}-\frac{M_2(\varphi)\frac{dI_2}{d\varphi}}{2\,[I_2(\varphi)]^2}\right\}q_2=$$

$$=\frac{M_2(\varphi)+\frac{d}{d\varphi}[E_2(\varphi)]}{\sqrt{I_2(\varphi)}}.$$

Bekanntlich kann man dieses System von zwei Differentialgleichungen 2. Ordnung durch den Ansatz $y_1=\dot{q}_1$, $y_2=q_1$, $y_3=\dot{q}_2$, $y_4=q_2$ in 4 Differentialgleichungen 1. Ordnung zurückführen und damit werden diese der weiteren Behandlung zugänglich gemacht [4]

$$\left.\begin{array}{ll}\dfrac{dy_1}{dt}+\alpha_{1\,2}y_2+\alpha_{1\,4}y_4=V_1; & \dfrac{dy_2}{dt}-y_1=0;\\[2ex] \dfrac{dy_3}{dt}+\alpha_{3\,2}y_2+\alpha_{3\,4}y_4=V_3; & \dfrac{dy_4}{dt}-y_3=0,\end{array}\right\}$$

wobei

$$\alpha_{1\,2}=\frac{c-\frac{d}{d\dot{\varphi}}[M_1(\dot{\varphi}_1)]\frac{d\dot{\varphi}}{d\varphi}}{I_1(\varphi)}+\frac{M_1(\dot{\varphi})\frac{dI_1}{d\varphi}}{2\,[I_1(\varphi)]^2};$$

$$\alpha_{1\,4}=-\frac{c}{\sqrt{I_1(\varphi)}\sqrt{I_2(\varphi)}};\quad \alpha_{3\,2}=\alpha_{1\,4};$$

$$\alpha_{3\,4}=\frac{c+\frac{d}{d\varphi}[M_2(\varphi)]}{I_2(\varphi)}-\frac{M_2(\varphi)\frac{dI_2}{d\varphi}}{2\,[I_2(\varphi)]^2};$$

$$V_1 = \frac{M_1(\dot{\varphi}) - \frac{d}{d\varphi}[E_1(\varphi)]}{\sqrt{I_1(\varphi)}};$$

$$V_3 = -\frac{M_2(\varphi) + \frac{d}{d\varphi}[E_2(\varphi)]}{\sqrt{I_2(\varphi)}};$$

bedeuten.

5. Über die erzwungene Schwingung eines linearen Systems

Im allgemeinen pflegt man unter dem Begriff der erzwungenen Schwingung denjenigen stationären Bewegungszustand zu verstehen, dem ein schwingungsfähiges System unter dem Einfluß einer periodischen Störungskraft für $t \to \infty$ zustrebt. Da aber in diesem stationären Zustand eine gewisse Anzahl an bestimmten Stellen jeder einzelnen Periode stets erneut erregter Eigenschwingungen auftreten kann, so dürfte es ratsam erscheinen, unter erzwungener Schwingung diejenige Bewegung zu verstehen, die man aus dem stationären Zustand durch Abtrennung sämtlicher darin expleziter vorkommender Eigenschwingungen erhält, und die dann eine mehr oder minder verzerrte Wiedergabe des zeitlichen Verlaufs der den gesamten Bewegungsvorgang bedingten Störungskraft darstellt.

Die Behauptung, daß ein schwingungsfähiges System unter dem Einfluß einer äußeren periodischen Kraft eine von einer gedämpften, mithin mehr oder minder rasch abklingenden Eigenschwingung überlagerte erzwungene Schwingung ausführt, darf keineswegs in voller Allgemeinheit aufgestellt werden. Die Richtigkeit dieser Bemerkung steht und fällt mit dem dabei zugrunde gelegten Begriff der erzwungenen Schwingung, der in der einschlägigen Literatur nicht immer genau definiert wird.

Den Anlaß zu dieser Definition gibt die Tatsache, daß sich das Integral

$$x(t) = \frac{1}{m\,\omega} \cdot \int_0^t e^{-\frac{p}{2m}(t-s)} \cdot \sin\omega(t-s) \cdot K(s)\,ds \tag{1,1}$$

$$\left(\omega^2 = \frac{c}{m} - \frac{p^2}{4m^2} > 0\right)$$

der Schwingungsgleichung

$$m \cdot \frac{d^2x}{dt^2} + p \cdot \frac{dx}{dt} + c \cdot x = K(t) \tag{1,2}$$

mit der mit der Periode 2τ periodischen, lediglich als absolut integrabel vorauszusetzenden Störungsfunktion $K(t)$ sowie mit den Anfangsbedingungen

$$x(0) = x'(0) = 0$$

in der Form

$$x(t) = e^{-\frac{p}{2m}t} \cdot \{C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t)\} + \varphi(t) \tag{1,3}$$

mit

$$\left.\begin{aligned} C_1 &= -\varphi(0), \\ C_2 &= -\frac{p}{2m\omega} \cdot \varphi(0) - \frac{1}{\omega} \cdot \varphi'(0) \end{aligned}\right\} \tag{1,31}$$

schreiben läßt, wobei dann die mit der Periode 2τ periodische, stetige und stetig differenzierbare Funktion

$$\varphi(t) = \frac{1}{m\omega} \cdot \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{p}{2m}(t-s)} \cdot \sin\omega(t-s) \cdot K(s)\,ds, \tag{1,4}$$

für die augenscheinlich

$$\varphi(t) = \lim_{t\to\infty} x(t)$$

gilt, als erzwungene Schwingung bezeichnet wird. Bei Zulassung dieser Definition ist natürlich die oben zitierte Bemerkung durchaus unzutreffend. Allein es ist damit zu rechnen, daß in dem durch (1,4) gegebenen stationären Bewegungszustand eine gewisse Anzahl an bestimmten Stellen jeder einzelnen Periode stets erneut erregter Eigenschwingungen auftritt. Ein einfaches Beispiel hierfür bietet der durch

$$K(t) = \left\{\begin{matrix} K_0 \text{ für } 0 < t < \tau, \\ 0 \quad \text{für } \tau < t < 2\tau \end{matrix}\right\} \tag{2,1}$$

mit

$$K(t + v \cdot 2\tau) = K(t) \tag{2,11}$$

gekennzeichnete Fall einer durch eine rechteckige Mäanderkurve dargestellten Störungsfunktion, für den sich als Lösung

$$\left.\begin{aligned} x(t) = &-\frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t+2\tau)} \cdot \left\{\cos(\omega t) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega t)\right\} \\ &-\frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t+\tau)} \cdot \left\{\cos\omega(t+\tau) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega(t+\tau)\right\} \\ &+\frac{K_0}{2c} \cdot \{1-(-1)^n\} \\ &+(-1)^n \cdot \frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}t'} \cdot \left\{\cos(\omega t') + \frac{p}{2m\omega}\sin(\omega t')\right\} \\ &+(-1)^n \cdot \frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t'+\tau)} \cdot \left\{\cos\omega(t'-\tau) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega(t'-\tau)\right\} \end{aligned}\right] \tag{2,2}$$

mit

$$F = 1 + 2e^{-\frac{p}{2m}\tau} \cdot \cos(\omega\tau) + e^{-\frac{p}{m}\tau}$$

und

$$t = (n-1)\tau + t' \quad \begin{pmatrix} n = 1, 2, 3, \dots \\ 0 \leq t' < \tau \end{pmatrix}$$

ergibt. In bezug auf die in (1,3) eingeführte Darstellungsform gilt dabei

$$e^{-\frac{p}{2m}t} \cdot \{C_1 \cdot \cos(\omega t) + C_2 \cdot \sin(\omega t)\}$$

$$= -\frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t+2\tau)} \cdot \left\{\cos(\omega t) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega t)\right\}$$

$$-\frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t+\tau)} \cdot \left\{\cos\omega(t+\tau) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega(t+\tau)\right\}$$

sowie

$$\varphi(t) = \frac{K_0}{2c} \cdot \{1-(-1)^n\}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}t'} \cdot \left\{\cos(\omega t') + \frac{p}{2m\omega}\sin(\omega t')\right\}$$

$$+ (-1)^n \cdot \frac{K_0}{cF} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t'+\tau)} \cdot \left\{\cos\omega(t'-\tau) + \frac{p}{2m\omega}\sin\omega(t'-\tau)\right\},$$

doch wird man statt (2,2) wohl zweckmäßigerweise die unmittelbar aus (1,1) zu entnehmende Lösungsform

$$x(t) = \frac{K_0}{2c} \cdot \{1-(-1)^n\} - \frac{K_0}{c} \cdot \sum_{\nu=1}^{n} (-1)^{\nu-1} \cdot e^{-\frac{p}{2m}(t'+(n-\nu)\tau)}$$

$$\cdot \left[\cos\omega\{t'+(n-\nu)\tau\} + \frac{p}{2m\omega} \cdot \sin\omega\{t'+(n-\nu)\tau\}\right]$$

wählen, weil hierin die an jeder einzelnen Sprungstelle der Störungsfunktion (2,1) stets neu erregten Eigenschwingungen des harmonischen Oszillators besonders deutlich zum Ausdruck gelangen. Hier liegt es nun offenbar nahe, unter erzwungener Schwingung lediglich die Funktion

$$\frac{K_0}{2c} \cdot \{1-(-1)^n\}$$

zu verstehen, d.h. allgemein gesprochen denjenigen Bewegungsvorgang, den man aus dem durch (1,4) gegebenen stationären Zustand dadurch erhält, daß man s ä m t l i c h e explizite in ihm auftretenden Eigenschwingungen des Oszillators abtrennt. Denn wenn man überhaupt zwischen Eigenschwingungen und erzwungener Schwingung unterscheiden will, wird man doch wohl jede Funktion von der Form

$$e^{-\frac{p}{2m}\cdot(t'+t_0)}\cdot\left\{C_1\cdot\cos\omega(t'+t_0)+C_2\cdot\sin\omega(t'+t_0)\right\}$$

mit festem t_0 als eine Eigenschwingung ansprechen müssen, und die Bezeichnung „erzwungene Schwingung" wäre dann eben für diejenige Bewegung zu reservieren, die eine mehr oder minder verzerrte Wiedergabe der den gesamten Bewegungsvorgang $x(t)$ bedingenden Störungsfunktion $K(t)$ darstellt. Auf Grund der Definition sind also beispielsweise die mit Hilfe eines Oszillographen aufgenommenen Kurven, falls man dabei, wie in der Praxis allgemein üblich, die Eigenschwingungen des Oszillographen wegdämpft, unmittelbar als Wiedergaben von „erzwungenen Schwingungen" anzusehen, und dies dürfte sich vollständig mit der in der Praxis vertretenen Auffassung des Tatbestandes in Übereinstimmung befinden. So ist in der Literatur wiederholt darauf hingewiesen worden, daß die mit (1,1) unter der Voraussetzung einer absolut integrablen Störungsfunktion $K(t)$ vollkommen identische Lösungsform

$$x(t)=e^{-\frac{p}{2m}t}\cdot\left\{C_1\cdot\cos(\omega t)+C_2\cdot\sin(\omega t)\right\}+\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}d_\mu c_\mu e^{\frac{\pi}{\tau}i\mu(t-\psi_\mu)}$$

mit

$$C_1=-\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}d_\mu c_\mu e^{\frac{\pi}{\tau}i\mu\psi_\mu},$$

$$C_2=-\frac{p}{2m\omega}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}d_\mu c_\mu e^{-\frac{\pi}{\tau}i\mu\psi_\mu}-\frac{\pi i}{\omega\tau}\cdot\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}\mu d_\mu c_\mu e^{-\frac{\pi}{\tau}i\mu\psi_\mu}$$

sowie

$$d_\mu^2=\frac{1}{\left(c-m\frac{\pi^2}{\tau^2}\mu^2\right)^2+p^2\cdot\frac{\pi^2}{\tau^2}\mu^2}$$

und

$$\frac{\pi}{\tau}\mu\psi_\mu=\operatorname{arc\,tg}\frac{p\cdot\frac{\pi}{\tau}\mu}{c-m\frac{\pi^2}{\tau^2}\mu^2},$$

zu der man mit Benutzung des formalen Ansatzes

$$K(t)=\sum_{\mu=-\infty}^{+\infty}c_\mu\cdot c^{\frac{\pi}{\tau}i\mu t}$$

mit

$$c_\mu = \frac{1}{2\tau} \cdot \int_0^{2\tau} K(s)\, e^{-\frac{\pi}{\tau} i \mu s}\, ds$$

unter Anwendung des für lineare Differentialgleichungen gültigen Superpositionsprinzips gelangt, nicht immer als zweckmäßige Darstellung des Schwingungsvorganges anzusehen ist, und dies besagt eben nichts anderes, als daß man den „erzwungenen Vorgang" losgelöst von sämtlichen Eigenschwingungen des Oszillators dargestellt haben möchte. In diesem Sinne ist nun auch die eingangs zitierte Bemerkung zu verstehen, die mit stillschweigender Benutzung der Tatsache zum Ausdruck bringen sollte, daß die Eigenschwingungen eines Oszillators nicht nur beim Einsetzen einer Störungskraft erregt werden, sondern unter gewissen Umständen überdies auch im weiteren Verlauf des Bewegungsvorganges in regelmäßigen Intervallen in die Erscheinung treten können.

Ausdrücklich sei zum Schlusse hervorgehoben, daß die beiden im vorhergehenden in Betracht gezogenen Auffassungen des Bewegungsvorganges, der bei einem unter der Einwirkung einer periodischen Störungskraft stehenden harmonischen Oszillator erfolgt, an sich durchaus gleichberechtigt und beide richtig sind, und daß es sich lediglich darum handeln kann, diejenige Auffassung zu bevorzugen, die den praktisch vorliegenden Verhältnissen am besten gerecht wird [1], [2].

6. Verfahren zur Berechnung der Eigenfrequenzen und der erzwungenen Schwingungen

Kluge und Schunck [1], [5], [6] haben die Torsionsschwingungen der Kurbelwellen für mehr als zwei Freiheitsgrade nach dem Verfahren von Trefftz in Einzelausführungen durchgeführt. Von Grammel [7] stammt eine Methode für die Berechnung der Schwingungen auf der Basis der sogenannten „Frequenzfunktionen". Diese Funktionen sind von Grammel tabellarisch zusammengestellt. Das gleiche Verfahren kann ebenso für die Torsionsschwingungen der Arbeitsmaschinen eingesetzt werden. Weidenhammer [1], [8] hat gezeigt, daß bei der Berechnung der erzwungenen Schwingungen noch weitere Vereinfachungen im Zuge des Grammel'schen Verfahrens gemacht werden dürfen.

In [9] und [12] sind die Methoden der Eigenfrequenzberechnung unterschiedlicher Schwingungsmodelle zusammengefaßt. In [10] sind die Methoden der Abschätzung von Frequenzen sowie Verfahren zur experimentellen Bestimmung der hierzu notwendigen massengeometrischen Größen eingehend erörtert. In [11] wird u.a. die Eigenfrequenzberechnung von Turbinenschaufeln ausgeführt.

In [13] findet man Erfahrenswerte über die Schwingungen unterschiedlicher Systeme. In den Handbüchern [14], [15] kann man sich über die Vielfalt der Schwingungserscheinungen in der Technik orientieren.

Literatur

[1] DIZIOĞLU, B.: Getriebelehre, Bd. 3, Dynamik, Vieweg-Verlag 1966.
DIZIOĞLU, B.: Über die Schwingungen eines heterogenen mechanischen Systems. Fortschrittsberichte der VDI-Zeitschriften, Reihe 11, Nr. 24, 1976.
[2] MAGNUS, K.: Erzwungene Schwingungen des linearen Schwingers bei nichtharmonischer Erregung. Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik, Bd. 31 (1951), S. 324–329.
[3] TREFFTZ, E.: Zur Berechnung der Schwingungen von Kurbelwellen. Vorträge aus dem Gebiet der Aerodynamik, Aachen 1929, Berlin 1930, S. 214–219.
KAUDERER, H.: Nichtlineare Mechanik. Berlin, Springer-Verlag 1958, S. 159.
[4] HORN, J.: Gewöhnliche Differentialgleichungen, Walte de Gruyter, Berlin 1948, S. 79–91.
[5] KLUGE, F.: Zur Ermittlung kritischer Drehzahlen von Kurbelwellen. Ingenieur-Archiv, II. Bd. (1931), Springer-Verlag, S. 119–139.
[6] SCHUNCK, T. E.: Berechnung der kritischen Umlaufzahlen für die Welle eines Flugzeugmotors. Ingenieur-Archiv, II. Bd. (1931), Springer-Verlag, S. 591–603.
[7] BIEZENO/GRAMMEL: Technische Dynamik. Zweiter Band, zweite Auflage. Springer-Verlag (1953).
[8] WEIDENHAMMER, F.: Rheolineare Drehschwingungen in Kolbenmotoren. Ingenieur-Archiv, XXIII. Bd. (1955), S. 262–269.
[9] KLOTTER, K.: Technische Schwingungslehre, Bd. I und II, Springer-Verlag (1981) Berlin.
[10] HOLZWEISSIG-DRESIG: Lehrbuch der Maschinendynamik. Maschinendynamische Probleme und ihre praktische Lösung. Wien, Springer-Verlag 1979.
[11] KRÄMER, E.: Maschinendynamik. Springer-Verlag Berlin (1984).
[12] KOZESNIK, J.: Maschinendynamik. Carl Hanser Verlag München 1966.
[13] FLÜGGE, W.: Handbook of Engineering Mechanics. McGraw-Hill Book Company New York (1962).
[14] HARRIS-CREDE, E.: Shock and Vibration Handbook, in three volumes. McGraw-Hill Book Company New York (1961).
[15] ROTHBART, A.: Mechanical Design and Systems Handbook. McGraw-Hill Book Company New York (1964).